＜数学の問題への取り組み方解説書＞

問　a を正の定数とする。① 放物線 $C：y=ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$（ただし $t\neq0$）に対して，② C の P での接線を m，③ P を通り，y 軸に平行な直線を v とする。④ 直線 m に関して v を対称移動した直線を l とする。⑤ このとき，以下の問いに答えよ。⑥

(1) l の傾きを，a，t を用いて表せ。⑦

(2) l の y 切片は t によらず一定であることを示せ。⑧

上記のように，①～⑧の番号をつけました。

番号順に処理していきます。

①は $a>0$ でいいですよね。

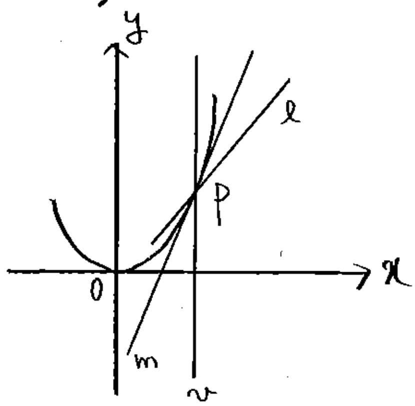
②は $t\neq0$ より点Pは原点と異なる点だとわかります。

③ $y=ax^2$ を微分して，$y'=2ax$

点Pにおける接線は $y-at^2=2at(x-t)$ より

$m：y=2atx-at^2$

④ $v：x=t$



⑤ ここが最大のポイントです。

解法設計をすることが重要。

㋐三角関数を利用する方法と

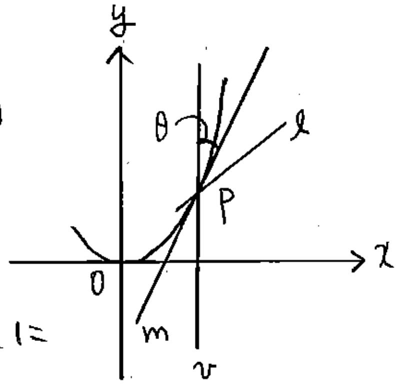
㋑直線に対して対称な点の座標を求める手法を利用して軌跡の問題として解く方法が思いつきます。

まずは㋐から。

場合分けなしで考えることもできますが，図の形が異なることも考えて，$t>0$ のときと $t<0$ のときで場合分けした方が楽ではないでしょうか。

⑥，⑦もまとめて一気にいきます。

(i) $t>0$ のとき



直線mと直線vのなす角をθ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

とおくと、lの傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

とわかる。

ここで、公式を十分に理解していない人に

補足。

一般のθ（ただし、$\sin\theta\neq0$ かつ $\cos\theta\neq0$）について、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{\tan\theta}$$ が成り立つ。

mの傾きが $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ であるから、

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2at$ より $\tan\theta=\frac{1}{2at}$

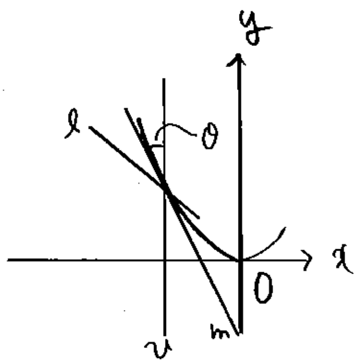
よって、$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\dfrac{1}{\tan2\theta}$

$$=\frac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{1}{2at}\right)^2}{2\cdot\dfrac{1}{2at}}$$

$$=\frac{4a^2t^2-1}{4at}$$



(ii) $t<0$ のとき

(i)と同様にθ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$をとると、

lの傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$

mの傾きが $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)$ であるから、

$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=2at$ より $\tan\theta=-\frac{1}{2at}$

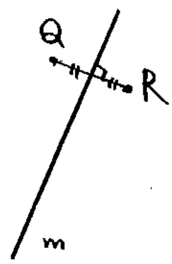
よって
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) = -\frac{1}{\tan 2\theta}$$
$$= -\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$$
$$= -\frac{1-\left(-\frac{1}{2at}\right)^2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2at}\right)}$$
$$= \frac{4a^2t^2-1}{4at}$$

(i)(ii)あわせて、求める ℓ の傾きは、$\frac{4a^2t^2-1}{4at}$ (1)の答

次に①の方法。

ℓ 上の点を $Q(t,g)$、mに関して Qと対称な点を $R(X,Y)$ とおく。

ここでまず点Qが点Pと異なるとき、すなわち $g\neq at^2$ のときについて考える。



QRの中点がm上にあることから、

$$\frac{Y+g}{2}=2at\cdot\frac{X+t}{2}-at^2 \cdots ※1$$

QRがmと垂直であるから、

$$\frac{Y-g}{X-t}\cdot 2at=-1 \cdots\cdots ※2$$

※2より $g=Y+\frac{X-t}{2at}$

これを※1に代入して整理すると、

$$Y=\frac{4a^2t^2-1}{4at}X+\frac{1}{4a} \cdots\cdots ※3$$

$g=at^2$ のとき、点Rの座標は、点Qと等しく (t,at^2) となるが、$(X,Y)=(t,at^2)$ は ※3 をみたす。

また逆に㊟3をみたす(X, Y)について、Pをmに関して対称移動したという条件をみたす。

よって直線ℓの軌跡は、$y = \dfrac{4a^2t^2 - 1}{4at}x + \dfrac{1}{4a}$ ……㊟4

従ってℓの傾きは、$\dfrac{4a^2t^2 - 1}{4at}$ (1)の答え

⑧ この手法だと⑧も一気にいけるのでこの方がいいでしょうか。

ℓのy切片は㊟4より$\dfrac{1}{4a}$でこれはtによらず一定と言えます。

尚、㋐の方法でも、その後簡単に直線の式を求めて、y切片がtによらず一定であると言うことができます。

みなさんに、「入試問題の多くは問題文に書いてあるとおりに解けばいい。」ということをわかってもらえたら嬉しいです。